WS 09/10

Aufgabe 5

Seien $f(x) = \exp(x) - 1 - x$ und $g(x) = \sin^2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Die Funktionen f und g sind auf einer Umgebung U von 0 definiert und stetig; somit gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to 0} \sin^2(x) = 0$. Die Funktionen f und g sind differenzierbar mit $f'(x) = \exp(x) - 1$ und $g'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Weiter sind f' und g' auf U definiert und stetig, und es gilt $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ und $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$. Ferner sind f' und g' differenzierbar mit $f''(x) = \exp(x)$ und $g''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$. Es ist $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$ und $\lim_{x\to 0} 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2$ (aufgrund der Stetigkeit von f'' und g''). Damit existiert $\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. Mit der Regel von de

l'Hospital folgt

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)}{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1 - x}{\sin^2(x)}.$$

WS 10/11

Aufgabe 5

Es sind $\lim_{x\to 3}(x^3 - 27) = 0$ und $\lim_{x\to 3}(x - 3) = 0$, denn die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 27$ und $g(x) = x - 3$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und als Polynomfunktionen differenzierbar mit stetiger Ableitung. Es sind $\lim_{x\to 3} f'(x) = \lim_{x\to 3} 3x^2 = 27$ und $\lim_{x\to 3} g'(x) = \lim_{x\to 3} 1 = 1$. Somit existiert $\lim_{x\to 3} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ und ist 27. Es folgt $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = 27$ mit der Regel von de l'Hospital.

WS 13/14

Aufgabe 5

$x\sin(x)$ und $\ln(1+x^2)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar und nehmen in $x=0$ jeweils den Wert 0 an. Nach de l'Hospital gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{\ln(1+x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+x\cos(x)}{2x\cdot\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{2}\cdot\frac{\sin(x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{2}\cos(x)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}+\frac{1}{2}\cos(0)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}+\frac{1}{2}\ ,\end{aligned}$$

wenn $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ (und damit die ganze rechte Seite) existiert. Dafür kann aber wieder de l'Hospital angewendet werden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=\frac{1}{1}=1\ ,$$

also tatsächlich

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{\ln(1+x^2)}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}=1\ .$$

ws 15/16

Aufgabe 4

a) Für $a_n=\frac{\sin(n)\cdot\cos(n)}{n}$ gilt $|\sin(n)|\leq 1, |\cos(n)|\leq 1$, also $|a_n|\leq\frac{1}{n}$. Damit ist a_n eine Nullfolge.

b) $\sin(x)$ und x sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar und nehmen in $x=0$ jeweils den Wert 0 an; $\cos(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig (und differenzierbar) und nimmt in $x=0$ den Wert 1 an. Nach de l'Hospital gilt dann

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1\ ,$$

da der rechte Grenzwert existiert; damit gilt auch

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\cos(x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos(x)=1\cdot 1=1\ .$$

Aufgabe 5

In allen Punkten $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ ist f_a Quotient stetiger Funktionen, wobei der Nenner nicht 0 ist. Also ist f_a dort stetig, und wir müssen nur noch den Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ untersuchen. Die Funktion f_a ist stetig in $x = \frac{\pi}{2}$, wenn $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f_a(x) = f(\frac{\pi}{2}) = a$ gilt. Es ist

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f_a(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}.$$

Es gilt (weil sin und cos stetig sind) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(2x) = \sin(\pi) = 0$ und $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Wir können also versuchen, die Regel von de l'Hospital anzuwenden. Zähler und Nenner sind differenzierbar, und wir betrachten

$$\frac{(\sin(2x))'}{(\cos(x))'} = \frac{2\cos(2x)}{-\sin(x)} = -\frac{2\cos(2x)}{\sin(x)}.$$

Nun gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{2\cos(2x)}{\sin(x)} = -\frac{-2}{1} = 2,$$

also mit der Regel von de l'Hospital auch

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} = 2.$$

Für $a = 2$ ist also f_a stetig, für alle $a \neq 2$ ist f_a nicht stetig.